Ананян А.М., Горохов М.Ю., Злотников А.Г., Стешов А.И.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА ПОЛИГОНАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Данная работа развивает идеи [1], применяемые при определении предельных усилий в нормальных сечениях железобетонных элементов по критериям достижения предельных относительных деформаций в бетоне и арматуре. Рассматривается способ определения множества значений предельных обобщенных деформаций в нормальном сечении железобетонного элемента полигонального поперечного сечения.

Работа относится к области мостостроения. С выходом изменения 3 к СП 35.13330 [2] уточнилась возможность применения деформационных критериев достижения предельных состояний в расчетах по первой и второй группам предельных состояний. Например, в соответствии с п. 7.56 [2] в расчете по прочности предельные усилия в сечениях железобетонных элементов, нормальных к продольной оси элемента, допускается определять по предельным деформациям с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры в соответствии с п. 7.2 и приложением 8 [2]. Более того, п. 7.2 [2] допускает применение аналогичного подхода к определению предельных усилий, определенных по условиям трещиностойкости.

Приложение 8 [2] на примере определения предельного изгибающего момента, воспринимаемого плоским изгибаемым железобетонным элементом по прочности, описывает способ выполнения расчета по предельным деформациям. О том, каким образом данный подход можно обобщить на случай плоского внецентренного растяжения-сжатия, подробно говорится в работе [1]. В данной работе обобщаются подходы [1, 2] к определению множества критических эпюр деформаций и соответствующего ему множества значений предельных обобщенных деформаций для железобетонного элемента полигонального поперечного сечения (см. рисунок 1). Рассматриваются в том числе случаи нагружения стержневого железобетонного элемента, возникающие при косом внецентренном растяжении-сжатии и/или косом изгибе.

Исходными данными для задачи определения множества значений предельных обобщенных деформаций в нормальном сечении железобетонного элемента

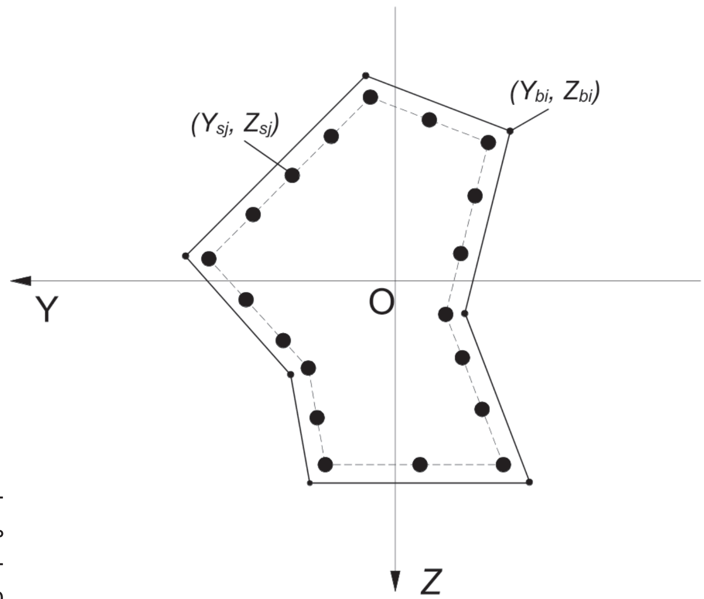

Рис. 1. Полигональное поперечное сечение железобетонного элемента

полигонального поперечного сечения являются координаты вершин контура, по форме являющегося произвольным многоугольником, грани которого не пересекаются между собой, и ограничивающего поперечное сечение бетонной части, а также координаты центров арматурных стержней (см. рисунок 1).

1. Основные положения.

Под предельным состоянием понимается состояние, при котором относительные деформации в бетоне или арматуре достигают своих предельных значений. Положительные значения относительных деформаций соответствуют относительному удлинению волокон, отрицательные значения – относительному укорочению волокон. Работа бетона растянутой зоны при определении предельных усилий не учитывается.

Принимается справедливой гипотеза плоских сечений. Плоские сечения, нормальные к продольной оси элемента, остаются плоскими после деформации и перпендикулярными к изогнутой оси элемента. Эпюра относительных деформаций волокон в точках поперечного сечения в любом состоянии, в том числе и предельном, представляет собой плоскость (см. рисунок 2). Положение и ориентацию данной

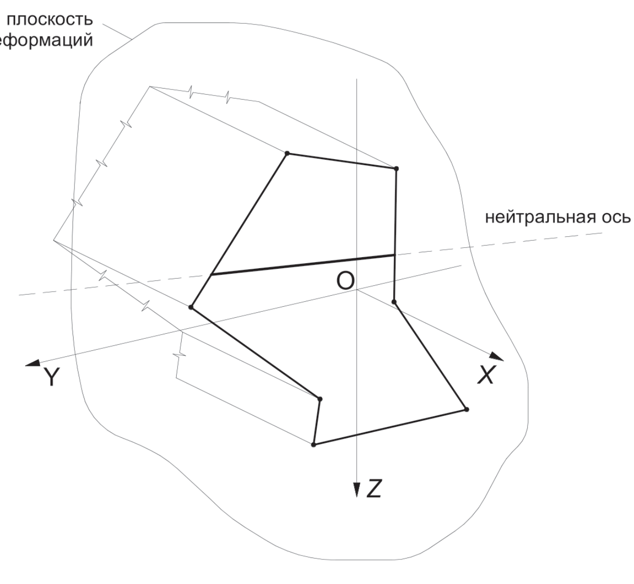

Рис. 2. Эпюра относительных деформаций в нормальном сечении элемента в соответствии с гипотезой плоских сечений

плоскости относительно системы координат OXYZ в каждом состоянии однозначно определяют тройки значений обобщенных деформаций в нормальном сечении элемента: относительной деформации в начале координат 0 и кривизны относительно осей 0Y и 0Z.

Искомое множество предельных состояний содержит в себе все состояния, в которых хотя бы для одной точки бетонной части поперечного сечения или хотя бы для одного арматурного стержня значения на эпюре относительных деформаций достигают соответствующих предельных относительных деформаций для бетона или арматуры и при этом в остальных точках бетонной части поперечного сечения и арматурных стержнях значения относительных деформаций не превышают соответствующих предельных значений. Полученному множеству эпюр относительных деформаций в предельных состояниях соответствует множество значений предельных обобщенных деформаций.

2. Определение множества значений предельных обобщенных деформаций в нормальном сечении железобетонного элемента полигонального поперечного сечения по критерию достижения предельных относительных деформаций в бетоне или арматуре.

В соответствии с гипотезой плоских сечений значение относительной деформации в точке нормального сечения с координатами Y и Z определяется линейной зависимостью: $\varepsilon = \varepsilon_o + \text{æ}_Y Z + \text{æ}_Z Y$, где значения обобщенных деформаций – относительной деформации ε_o в начале координат 0 и кривизна æ_Y и æ_Z относительно осей OY и OZ – не зависят от координат Y и Z. Плоскость эпюры относительных деформаций в предельном состоянии определена, если известны ее значения хотя бы в трех различных точках. В этом случае для данного предельного состояния оказывается известной тройка значений ε_o, æ_Y и æ_Z.

Задача отыскания множества значений предельных обобщенных деформаций состоит в том, чтобы указать способ перебора всех точек данного множества. Так как рассматриваемое множество, вообще говоря, содержит бесконечное число близко расположенных точек, то необходимо указать непрерывную параметризацию точек множества, каждому фиксированному набору значений которой соответствовало бы то или иное предельное состояние. Далее рассматривается один из возможных вариантов такой параметризации. Для целей дальнейшего изложения формула для вычисления относительных деформаций переписывается в следующем виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_o + (\textbf{æ} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{i} = \varepsilon_o + (\mathbf{e} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{i} = \varepsilon_o + \text{æ}\,(\mathbf{i} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{R} = \varepsilon_o + \text{æ}\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R} = \varepsilon_o + \tilde{\textbf{æ}} \cdot \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R} = Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки в нормальном сечении;

$\textbf{æ} = \text{æ}_Y \mathbf{j} - \text{æ}_Z \mathbf{k}$ – вектор кривизны;

$\text{æ} = |\textbf{æ}|$, $\mathbf{e} = \textbf{æ} / |\textbf{æ}|$ – модуль и орт вектора кривизны;

$\tilde{\textbf{æ}} = \mathbf{i} \times \textbf{æ} = \text{æ}_Z \mathbf{j} + \text{æ}_Y \mathbf{k}$ – дополнительный вектор кривизны;

$|\tilde{\textbf{æ}}| = |\textbf{æ}| = \text{æ}$, $\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\textbf{æ}} / |\tilde{\textbf{æ}}|$ – модуль и орт дополнительного вектора кривизны.

На рисунке 3 стрелками показаны положительные направления скалярных и векторных величин в нормальном сечении, фигурирующих в рассмотренном выше выражении для вычисления относительных деформаций. Выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{\textbf{æ}} \cdot \textbf{æ} = 0, \ (\textbf{æ} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{i} = \tilde{\textbf{æ}} \cdot \mathbf{R} = \text{æ}_Z Y + \text{æ}_Y Z$$

Единичный вектор $\tilde{\mathbf{e}}$ дополняет орт вектора кривизны и орт продольной оси элемента до правой тройки.

Далее в качестве основной будет использоваться следующая запись выражения для вычисления относительных деформаций в точках поперечного сечения элемента $\varepsilon = \varepsilon_o + \text{æ}\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}$.

Приведенная форма записи выражения для вычисления относительных деформаций позволяет существенно упростить параметризацию точек

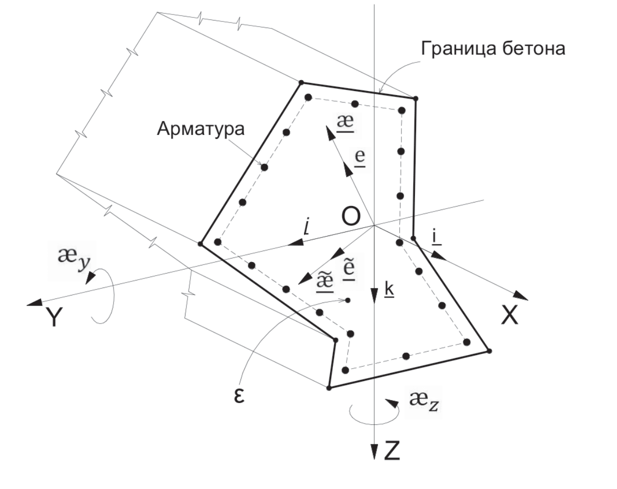

Рис. 3. Положительные направления скалярных и векторных величин в нормальном сечении элемента: кривизны æ_Y и æ_Z; ортов i, j и k системы координат OXYZ; вектора кривизны и орта e вектора кривизны; дополнительного вектора кривизны $\tilde{\text{æ}}$ и орта $\tilde{e}$ дополнительного вектора кривизны.

множества предельных состояний. Задачу отыскания такой параметризации можно сформулировать следующим образом: указать способ определения параметров ε_o и æ для всех предельных состояний при произвольно выбранном направлении единичного вектора **ẽ**. Далее рассматривается один из возможных вариантов решения сформулированной таким образом задачи.

2.1. Поиск арматурного стержня в поперечном сечении элемента, наиболее удаленного от начала координат по направлению единичного вектора, дополняющего орт вектора кривизны и орт продольной оси элемента до правой тройки.

Выражение для вычисления относительных деформаций в арматурных стержнях можно записать следующим образом: $\varepsilon_{s,i} = \varepsilon_o + æ\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$, где $\mathbf{R}_{s,i} = Y_{s,i}\mathbf{j} + Z_{s,i}\mathbf{k}$ – радиус-вектор центра i-го арматурного стержня; $\varepsilon_{s,i}$ – относительная деформация i-го арматурного стержня. Предельное состояние для арматуры по критерию достижения предельных относительных деформаций наступит, если хотя бы в одном арматурном стержне значение относительной деформации достигнет своего предельного значения и при этом в других арматурных стержнях значения относительной деформации не будут превышать предельное значение. Данная ситуация возможна только в том случае, когда максимальное значение относительной деформации в арматурных стержнях будет равно значению предельной относительной деформации $\varepsilon_{s,ult}$ для арматуры.

Зависимость для $\varepsilon_{s,i}$ представляет собой линейную форму независимых величин ε_o и $\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$ с коэффициентом пропорциональности æ, значение которого заранее неизвестно. При этом величина æ всегда неотрицательна по определению. Согласно основной теореме линейного программирования линейная форма достигает своего максимального (или минимального) значения в угловой точке многогранника допустимых решений. Задача сводится к построению многогранника допустимых решений и обходу его угловых точек. Ограничениями в задаче являются: схема расположения арматурных стержней в поперечном сечении элемента и условие (уравнение) предельного состояния для арматуры. Можно утверждать, что в силу неотрицательности величины æ, максимум $\varepsilon_{s,i}$ (с учетом принятого правила знаков относительная деформация растяжения в арматуре считается положительной) может быть достигнут только при условии достижения величиной $\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$ своего максимально возможного значения. Исходная задача, таким образом, разделяется на две подзадачи.

Первая подзадача – это определение максимума величины $\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$ при фиксированном направлении вектора **ẽ**. В данной подзадаче реализуется первое ограничение – схема расположения арматурных стержней. Направление вектора **ẽ** в этом случае является первым естественным параметром, определяющим точку в множестве предельных состояний. Вторая подзадача – это определение всех возможных комбинаций значений параметров ε_o и æ для найденного значения максимума величины $\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$, удовлетворяющих уравнению предельного состояния для арматуры при фиксированном направлении вектора **ẽ**. В данной подзадаче реализуется второе ограничение – условие предельного состояния для арматуры. Параметр æ в этом случае может являться вторым естественным параметром, определяющим точку в множестве предельных состояний в случае, если в качестве искомой величины принять значение параметра ε_o. Либо их можно поменять местами, если в качестве искомой величины принять значение параметра æ.

Таким образом, искомое множество предельных состояний по арматуре является двухпараметрическим, каждая точка которого определяется конкретными значениями рассмотренных выше параметров. Завершает решение задачи указание допустимых диапазонов изменения значений данных параметров. Направление вектора **ẽ** определяется значением одного параметра. В качестве такого параметра можно, например, принять значение угла между вектором **ẽ** и ортом **j** оси OY в диапазоне изменения от 0 до 360 градусов. Пояснения к диапазонам изменения параметров ε_o и æ приводятся далее. Величина $\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$ есть не что иное, как расстояние от начала координат до i-го арматурного стержня по направлению вектора **ẽ**. Задача поиска, наиболее удаленного в указанном смысле арматурного стержня в поперечном сечении элемента, может быть решена полным перебором по всем арматурным стержням.

Для эффективного сокращения времени поиска, наиболее удаленного от начала координат арматурного стержня по направлению вектора **ẽ** при большом количестве арматурных стержней, возможно предварительное построение выпуклой оболочки множества центров арматурных стержней. В силу дополнительных утверждений основной теоремы линейного программирования о том, что множество допустимых решений является выпуклым многогранником, а также того, что если линейная форма принимает максимальное значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек, поиск наиболее удаленного арматурного стержня можно производить, перебирая только арматурные стержни, расположенные в угловых точках выпуклой оболочки множества центров арматурных стержней.

2.2. Поиск вершины внешнего контура бетонной части поперечного сечения элемента, наиболее удаленной от начала координат по направлению единичного вектора, дополняющего орт вектора кривизны и орт продольной оси элемента до левой тройки.

Выражение для вычисления относительных деформаций в различных точках бетонной части поперечного сечения можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_o + æ\mathbf{\tilde{e}} \cdot \mathbf{R}_b$$

где $\mathbf{R}_b = Y_b\mathbf{j} + Z_b\mathbf{k}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки бетонной части поперечного сечения; ε_b – относительная деформация бетонной части поперечного сечения в рассматриваемой точке.

Предельное состояние для бетона по критерию достижения предельных относительных деформаций наступит, если хотя бы в одной точке бетонной части поперечного сечения значение относительной деформации достигнет своего предельного значения и при этом в других точках бетонной части поперечного сечения значения относительной деформации не будут превышать предельное значение. Данная ситуация возможна только в том случае, когда максимальное по абсолютной величине значение относительной деформации в бетоне будет равно значению предельной относительной деформации $\varepsilon_{b,ult}$ для бетона. По аналогии с задачей для арматуры возникает задача поиска экстремума линейной формы для ε_b с разницей, что теперь разыскивается минимум, а не максимум. Ограничениями в задаче являются: схема расположения границ бетонной части поперечного сечения элемента и условие (уравнение) предельного состояния для бетона. Задача разделяется на две подзадачи, ход решения которых аналогичен рассмотренному выше для арматуры.

Первая подзадача – это определение минимума величины $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_b$ при фиксированном направлении вектора $\tilde{\mathbf{e}}$. Задачу поиска минимума величины $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_b$ можно заменить на задачу поиска максимума величины $(-\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_b)$. Вторая подзадача – это определение всех возможных комбинаций значений параметров ε_o и æ для найденного значения максимума величины $(-\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_b)$, удовлетворяющих уравнению предельного состояния для бетона при фиксированном направлении вектора $\tilde{\mathbf{e}}$.

Аналогично решению для арматуры можно воспользоваться полным перебором по всем вершинам внешнего контура бетонной части поперечного сечения элемента. Это возможно в силу того, что рассматривается полигональное поперечное сечение элемента и с точки зрения основной теоремы линейного программирования внешний контур полигонального поперечного сечения элемента представляет собой систему линейных ограничений. Для сокращения времени расчета перебор возможно производить только по вершинам, расположенным в угловых точках выпуклой оболочки множества вершин контура бетонной части поперечного сечения.

2.3. Определение множества значений предельных обобщенных деформаций для фиксированного направления вектора кривизны.

Определение всех возможных комбинаций значений параметров ε_o и æ для найденного значения максимума величины $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i}$ при фиксированном направлении вектора $\tilde{\mathbf{e}}$, а значит и фиксированном направлении вектора кривизны, производится на основе уравнения предельного состояния для арматуры: $\varepsilon_{s,ult} = \varepsilon_o + æ\max\limits_{\mathbf{R}s,i}(\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_{s,i})$. Определение всех возможных комбинаций значений параметров ε_o и æ для найденного значения максимума величины $(-\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_b)$ при фиксированном направлении вектора $\tilde{\mathbf{e}}$, а значит и фиксированном направлении вектора кривизны, производится на основе уравнения предельного состояния для бетона: $\varepsilon_{b,ult} = \varepsilon_o + æ\max\limits_{\mathbf{R}b,i}(-\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_b)$. Принимая для $\varepsilon_{s,ult}$ и $\varepsilon_{b,ult}$ значения ε_{s2} и $(-\varepsilon_{b2})$ из [1, 2] соответственно, получим уравнения для конкретных механических моделей поведения бетона и арматуры под нагрузкой, рассматриваемых в качестве примера в данной работе. Далее приводятся несколько рисунков с краткими пояснениями, иллюстрирующими данные уравнения в различных расчетных случаях.

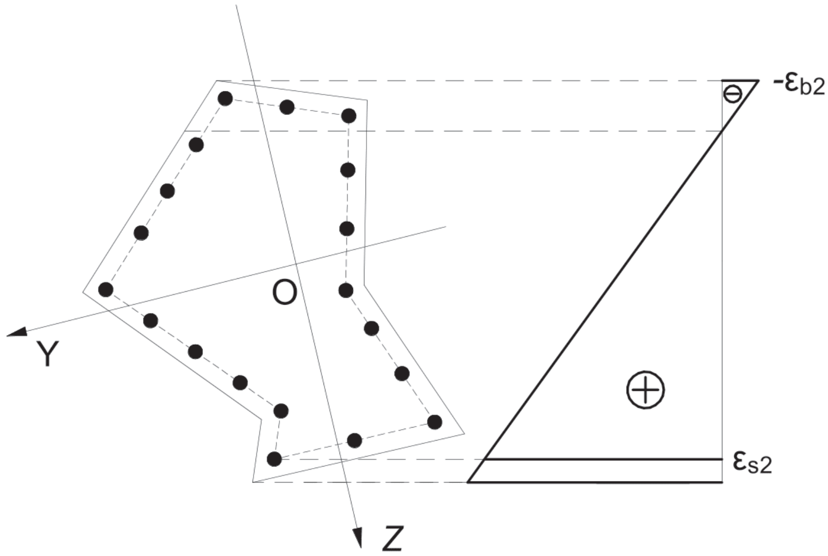

Рис. 4. Случай достижения бетоном предельного состояния при сжатии хотя бы в одной точке бетонной части поперечного сечения элемента и одновременного с этим достижения арматурой предельного состояния при растяжении хотя бы в одном арматурном стержне при фиксированном направлении вектора кривизны

2.3.1. Случай одновременного достижения предельных относительных деформаций в бетоне и арматуре.

Рисунок 4 иллюстрирует случай достижения бетоном предельного состояния при сжатии хотя бы в одной точке бетонной части поперечного сечения элемента и одновременного с этим достижения арматурой предельного состояния при растяжении хотя бы в одном арматурном стержне при фиксированном направлении вектора кривизны. В этом случае относительная деформация бетона в данной точке бетонной части поперечного сечения элемента равна предельной относительной деформации бетона ε_{b2}, а относительная деформация данного арматурного стержня равна предельной относительной деформации арматуры ε_{s2}. Единственная пара значений параметров ε_o и æ для зафиксированного направления вектора кривизны определяется из решения одновременно первого и второго уравнений раздела 2.3.

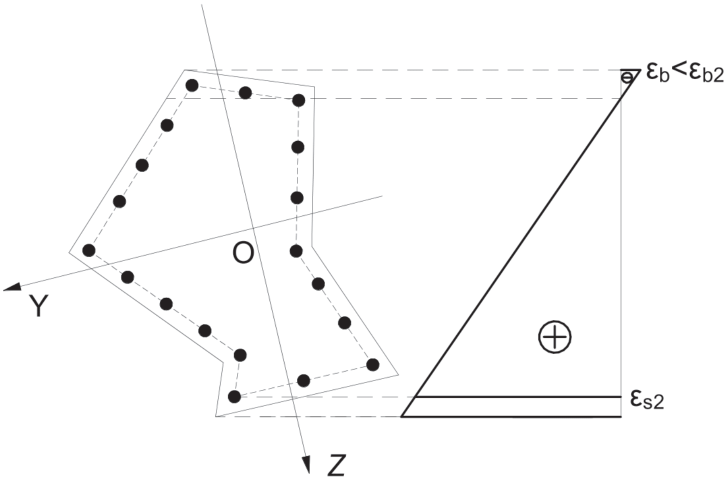

Рис. 5. Случай достижения предельного состояния при растяжении хотя бы в одном арматурном стержне при фиксированном направлении вектора кривизны

2.3.2. Случай достижения предельных относительных деформаций в арматуре и недостижения предельных относительных деформаций в бетоне.

Рисунок 5 иллюстрирует случай достижения предельного состояния при растяжении хотя бы в одном арматурном стержне и одновременного с этим недостижения предельного состояния при сжатии ни в одной точке бетонной части поперечного сечения элемента при фиксированном направлении вектора кривизны. В этом случае относительная деформация данного арматурного стержня равна предельной относительной деформации арматуры ε_{s2}, а относительная деформация бетона во всех точках бетонной части поперечного сечения элемента не превышает предельной относительной деформации бетона ε_{b2}. Все возможные комбинации пар значений параметров ε_o и æ для зафиксированного направления вектора кривизны удовлетворяют первому уравнению раздела 2.3.

2.3.3. Случай достижения предельных относительных деформаций в бетоне и недостижения предельных относительных деформаций в арматуре.

Рисунок 6 иллюстрирует случай достижения бетоном предельного состояния при сжатии хотя бы в одной точке бетонной части поперечного сечения элемента и одновременного с этим недостижения предельного состояния при растяжении ни в одном из арматурных стержней при фиксированном направлении вектора кривизны. В этом случае относительная деформация бетона в данной точке равна предельной относительной деформации бетона ε_{b2}, а относительные деформации арматурных стержней не превышают предельной относительно деформации арматуры ε_{s2}. Все возможные комбинации пар значений параметров ε_o и æ для зафиксированного направления вектора кривизны удовлетворяют второму уравнению раздела 2.3.

Определение множества значений предельных обобщенных деформаций для всех направлений вектора кривизны.

Непрерывно изменяя направление вектора кривизны, в соответствии с рекомендациями разделов 2.1–2.3 возможно определить значения параметров ε_o и æ на всем множестве предельных состояний в бетоне и арматуре для всех возможных направлений вектора кривизны. Тем самым оказывается решенной задача определения множества значений предельных обобщенных деформаций.

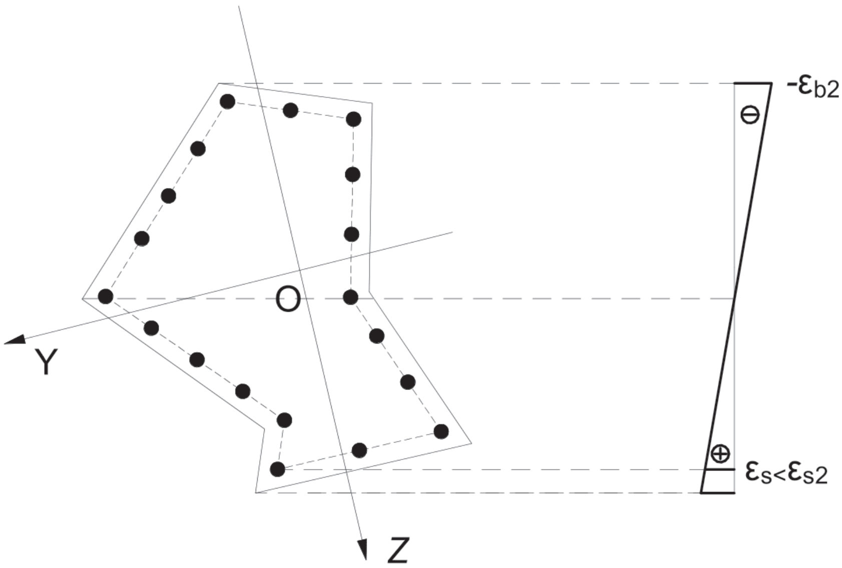

Рис. 6. Случай достижения бетоном предельного состояния при сжатии хотя бы в одной точке бетонной части поперечного сечения элемента при фиксированном направлении вектора кривизны

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананян А.М., Горохов М.Ю., Злотников А.Г., Стешов А.И.. Определение предельно допустимых усилий в нормальных сечениях железобетонных элементов по критерию предельных относительных деформаций в бетоне и арматуре при расчете по прочности. // Автомобильные дороги. 2021. № 6. С. 40–44.*
2. *СП 35.13330.2011 Мосты и трубы.*
3. *СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения.*